BACCALAUREAT GENERAL

SUJET SORTI

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

SPECIALITE

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2) a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b) Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3) Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

a) On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.

b) On suppose u et v strictement positifs. Montrer que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$.

Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève ½ point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne le point S(1 ; – 2 ; 0) et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1) Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point S et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ est :

A : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ **B** : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ **C** : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ **D** : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

2) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}$ sont :

A : $(-4; 0; 0)$ **B** : $\left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right)$ **C** : $\left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ **D** : $\left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$

3) La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ **B** : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ **C** : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ **D** : $\frac{9}{11}$

4) On considère la sphère de centre S et de rayon 3.

L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est égale :

A : au point I(1 ; – 5 ; 0)

B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0 ; t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0 ; 200[) = 0{,}5$.

1) Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

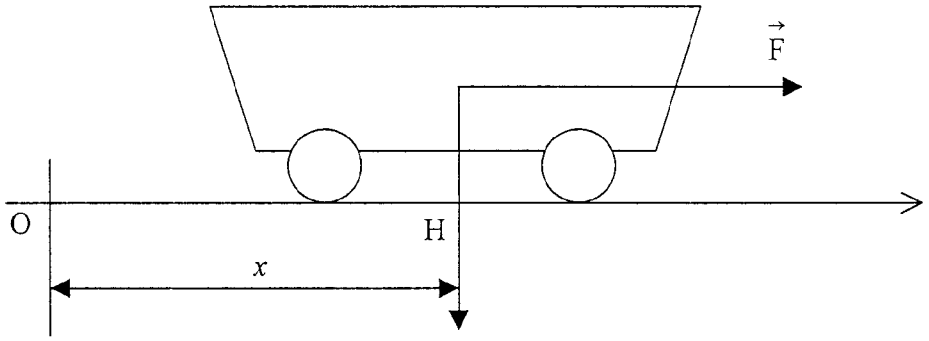
3) On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

a) Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

EXERCICE 5 (4 points)

Commun à tous les candidats



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 $N.m^{-1}.s^{-1}$.
La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement (E) $25x' + 200x'' = 50$, où :

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1) On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
Résoudre l'équation différentielle (F).

2) On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.

3) Calculer $V = \lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure où égale à 90 % de sa valeur limite V ?

4) Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.